

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Total	Nota

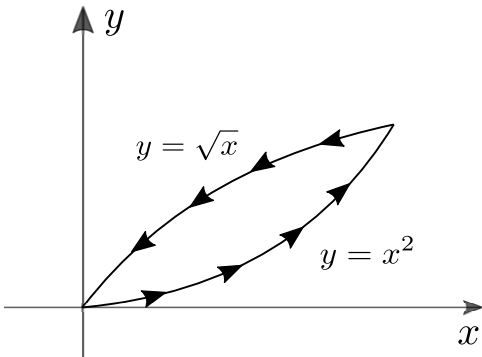
Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 100 minutos.

1) [15 ptos.] Sea $F(x, y) = (x\sqrt{x^2 + y^2} + 3x^2 \sin(y), y\sqrt{x^2 + y^2} + x^3 \cos(y))$

a) [8 ptos.] Calcular $\int_C F dr$ si C es el segmento que une $(0, 0)$ con $(1, 1)$

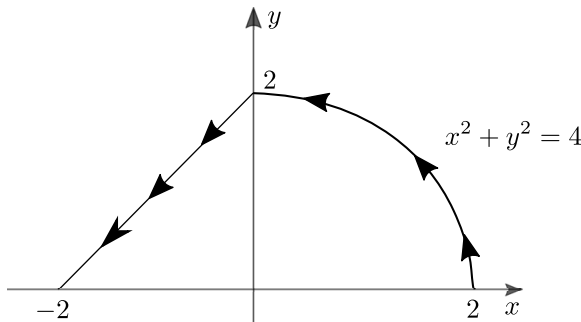
b) [7 ptos.] Calcular $\int_C F dr$ si C es la curva de la figura



2) [15 ptos.] Verifique el teorema de Gauss para $F(x, y, z) = (xz, 2yz, 3xy)$ donde S es el cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $0 \leq z \leq 3$.

3) [15 ptos.] Verificar el Teorema de Stokes para $F(x, y, z) = (2y, 2z, y)$ y C la curva que resulta de la intersección de $z = y$ con $x^2 + y^2 = 4$.

4) [15 ptos.] Usando El teorema de Green Calcule $\oint_C (-2xy) dx + y dy$ donde C es la curva de la figura que se muestra a continuación



Ayuda: Se podría incorporar una curva de modo que se obtenga un dominio cerrado.

PAUTA

1) Como el campo es conservativo

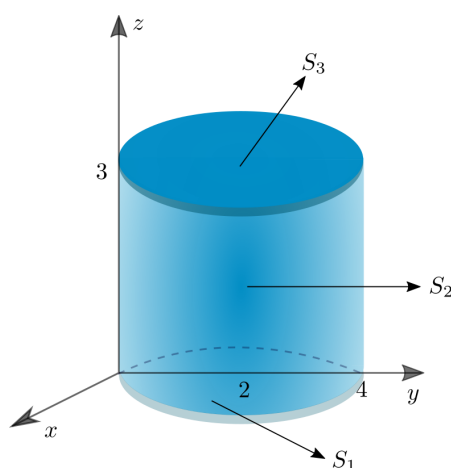
$$Q_x = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 3x^2 \cos y = P_y$$

entonces existe φ tal que $\nabla\varphi = F$. Luego $\varphi(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{3} + x^3 \sin y$

a) $\int_C F dr = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sin(1)$

b) Como la curva es cerrada $\int_C F dr = 0$

2) El dibujo es el siguiente



■ Por Gauss tenemos que

$$\int \int_S F ds = \int_0^\pi \int_0^{4 \sin \alpha} \int_0^3 3zr dz dr d\alpha = 54\pi$$

OBS: La integral debe representar el volumen del cilindro respetando su proyección.

■ Por parametrización:

★ Para S_1

$$r(u, v) = (u, v, 0), (u, v) \in \{u^2 + v^2 - 4v \leq 0\}$$

$$F(r(u, v)) = (0, 0, 3uv)$$

$$r_u \times r_v = (0, 0, -1)$$

$$\int \int_{S_1} = \int_0^\pi \int_0^{4 \sin \alpha} -3r^3 \sin \alpha \cos \alpha dr d\alpha = 0$$

★ Para S_2

$$r(\alpha, z) = (2 \cos \alpha, 2 + 2 \sin \alpha, z), \alpha \in [0, 2\pi], z \in [0, 3]$$

$$F(r(\alpha, z)) = (2z \cos \alpha, 4z + 4z \sin \alpha, 12 \cos \alpha + 12 \cos \alpha \sin \alpha)$$

$$r_u \times r_v = (2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha, 0)$$

$$\int \int_{S_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 4z + 4z \sin^2 \alpha + 8z \sin \alpha dz d\alpha = 54\pi$$

★ Para S_3

$$r(u, v) = (u, v, 3), (u, v) \in \{u^2 + v^2 - 4v \leq 0\}$$

$$F(r(u, v)) = (3u, 6v, 3uv)$$

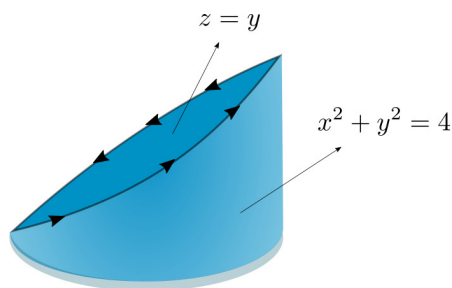
$$r_u \times r_v = (0, 0, 1)$$

$$\int \int_{S_3} = \int_0^\pi \int_0^{4 \sin \alpha} 3r^3 \sin \alpha \cos \alpha dr d\alpha = 0$$

Luego

$$\int \int_S F ds = \int \int_{S_1} F ds + \int \int_{S_2} F ds + \int \int_{S_3} F ds = 0 + 54\pi + 0 = 54\pi$$

3) El dibujo es el siguiente:



- Por Stokes tenemos que:

$$\text{rot}(F) = (-1, 0, -2)$$

$$N = (0, -1, 1)$$

$$\int_C F dr = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -2r dr d\alpha = -8\pi$$

- Parametrizando tenemos:

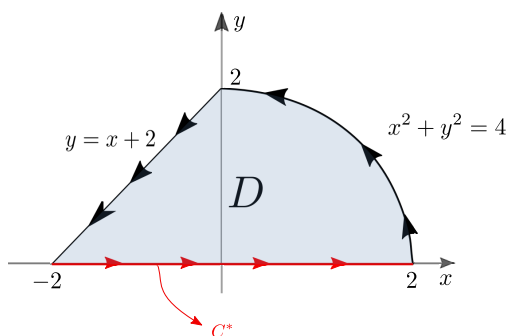
$$r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2 \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

$$F(r(t)) = (4 \sin t, 4 \sin t, 2 \sin t)$$

$$r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 2 \cos t)$$

$$\int_C F dr = \int_0^{2\pi} (-8 \sin^2 t + 12 \sin t \cos t) dt = -8\pi$$

4) Para poder usar Green, podemos cerrar la curva añadiendo el segmento C^* como se muestra a continuación y luego se resta.



$$\oint_C F dr = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA - \int_{C^*} F dr = \int_0^2 \int_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}} 2x dx dy - \int_{-2}^2 0 dt = \frac{8}{3} + 0 = \frac{8}{3}$$

OBS: Si no se resta de la integral de la curva que se agrega -5 puntos.